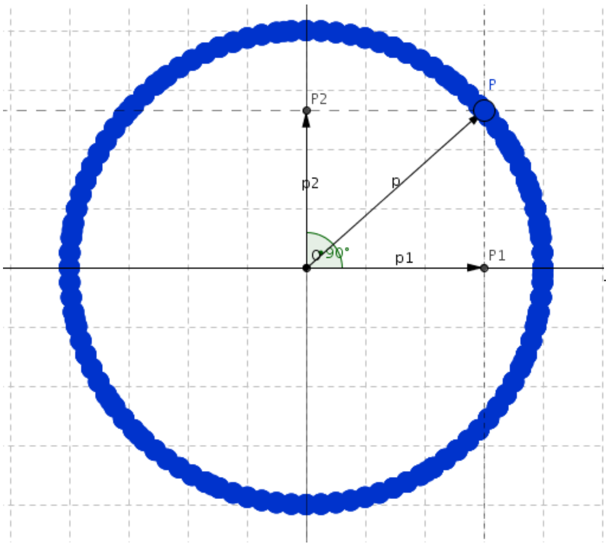
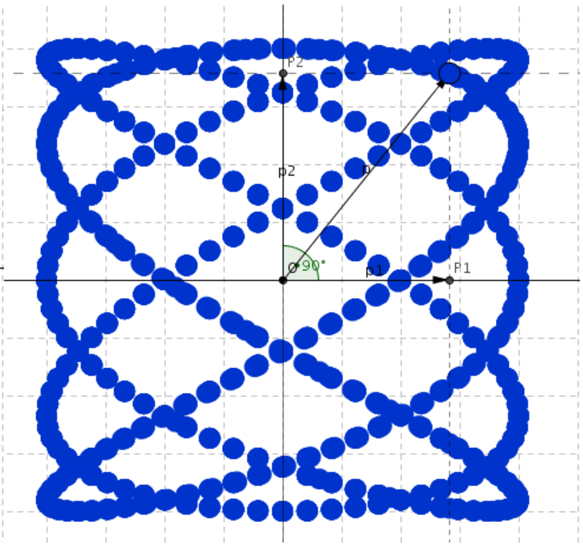
Inczeffy Szabolcs: Lissajoux görbék előállítása ferdeszögű rezgések egymásra tevődésével

I. Lissajoux görbék

Mint ismeretes a *Lissajoux görbék* merőleges rezgések egymásra tevődéseként jönnek létre. Változtatva a rezgések amplitudóját, frekvenciáját, illetve kezdőfázisát különböző méretű és alakú látványos görbéket, alakzatokat kapunk.



1. ábra: f_1:f_2 = 1:1 rezgésszámarányú Lissajoux görbe



2. ábra: f_1:f_2 = 5:3 arányú Lissajoux görbe

A *GeoGebra* (ingyen letölthető) számítógépes program segítségével, a Lissajoux görbe a két rezgés egymásra tevődésének nyomvonalaként jön létre.

Az 1. és 2. ábrákon látható P pont helyzetét meghatározó p vektor a p_1 és a p_2 vektorok összege. A p_1 és p_2 vektorok hosszát és irányítását a $p_1 = A_1 \cdot \cos(2\pi \cdot f_1 \cdot t) = A_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t + \pi/2 + \varphi_1)$ és a $p_2 = A_2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t + \varphi_2)$ rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg. Az egyenletekben A_1 és A_2 a rezgések legnagyobb kitérését, f_1 és f_2 a rezgésszámokat, t az időt, φ_1 és φ_2 a kezdőfázisokat jelölik.

A p vektor nagyságát *Püthagorasz* tételével a $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ összefüggésből számolhatjuk ki, míg irányát a $tg\varphi = \frac{p_2}{p_1} \Rightarrow \varphi = tg^{-1}(\frac{p_2}{p_1})$ képlettel határozhatjuk meg!

Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (1. ábra), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok (f_1: f_2 = n_1: n_2), akkor a 2. ábrához hasonló görbét kapunk.

A következőkben megvizsgáljuk a Lissajoux görbék előállítását egymással ferde szöget bezáró rezgések egymásra tevődéseként! Ehhez szükségünk lesz az általános háromszögben, illetve a trigonometrikus (egység sugarú) körben értelmezett általános szögfüggvényekre!

II. Általános szögfüggvények

II.-1. Az általános szögfüggvények definíciói

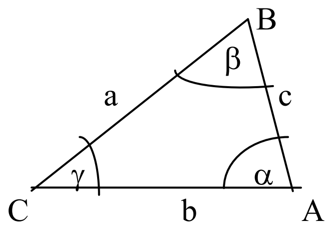
A hagyományos szögfüggvényeket derékszögű háromszögben szokás értelmezni, illetve az egységnyi sugarú kör segítségével, az értelmezést, tetszőleges (forgás) szögekre is ki lehet terjeszteni.

Feltevődik a kérdés, hogy tovább lehet-e általánosítani a szögfüggvényeket, azaz az általános háromszögben lehet-e általános (alakú) szögfüggvényeket értelmezni ?

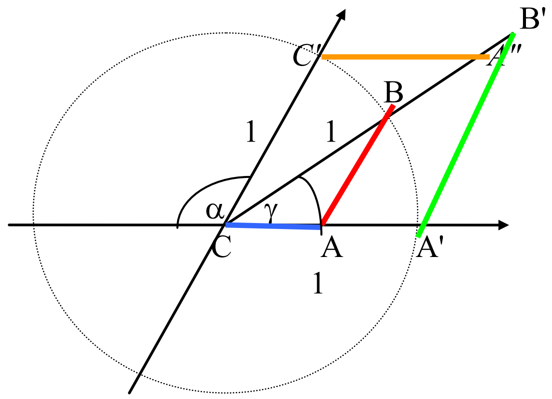
A válasz igen, sőt bizonyos estekben az általános szögfüggvényeket előnyösebben lehet használni, mint egyéb tételeket, de lássuk miről is van szó!

Az általános háromszögben (lásd az 3. ábrát) , a szokásos jelöléseket használva és az α - át tekintve alapszögnek, a következő szögfüggvényeket értelmezhetjük : $\sin_\alpha\gamma = \frac{c}{a}$; $\cos_\alpha\gamma = \frac{b}{a}$; $\mathrm{tg}_\alpha\,\gamma = \frac{c}{b}$ és $\mathrm{ctg}_\alpha\,\gamma = \frac{b}{c}$, ha $\alpha + \gamma \neq 0^0$. Természetesen $\alpha, \beta, \gamma \neq 0^0$; 180^0 és $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, illetve $a, b, c \neq 0$.

Ha $\alpha = 90^0$, akkor visszakapjuk a hagyományos szögfüggvényeket. Pl. $\sin_{90}\gamma = \sin\gamma$.



3. ábra: általános háromszög



4. ábra: egységsugarú (trigonometrikus) kör

Általánosabb definíciókat a trigonometriai (egységnyi sugarú) kör segítségével adhatunk meg:

ha $|CB| = |CA'| = |CC'| = 1$, akkor a 4. ábra szerint :

(a szakaszok valójában, előjeles szakaszok)

a $\sin_\alpha\gamma = AB$ ahol $\alpha \neq k\,180^0$, $k \in \mathbf{Z}$,

a $\cos_\alpha\gamma = CA$, ahol $\alpha \neq k180^0$, $k \in \mathbf{Z}$,

a $\mathrm{tg}_\alpha\,\gamma = A'B'$, ahol $\gamma \neq \{-\alpha + k180\}$, $k \in \mathbf{Z}$,

a $\mathrm{ctg}_\alpha\,\gamma = C'A''$, ahol $\gamma \neq \{k180\}$, $k \in \mathbf{Z}$

Egy adott háromszög esetén a definíciók segítségével könnyen bizonyíthatók a következő összefüggések:

$$tg_{\alpha}\gamma = \frac{1}{ctg_{\alpha}\gamma} = \frac{\sin_{\alpha}\gamma}{\cos_{\alpha}\gamma}$$, illetve

$$sin\ _{\alpha}\gamma = \frac{1}{\sin_{\gamma}\alpha} = \cos_{\alpha}\beta = \frac{1}{\cos_{\gamma}\beta} = tg_{\beta}\gamma = \frac{1}{tg_{\beta}\alpha} = ctg_{\beta}\alpha = \frac{1}{ctg_{\beta}\gamma}$$

Megfelelően felcserélve a szögeket még öt, a fentiekhez hasonló, összefüggést tudunk felírni.

II.-2. Az általános szögfüggvények kiszámítása

A szinusztétel segítségével könnyen igazolható, hogy $\sin_{\alpha}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. De ennél több is igaz: $\sin_{\alpha}\gamma = \frac{\sin_{\delta}\gamma}{\sin_{\delta}\alpha}$. Ez az összefüggés az alapszög változtatását teszi lehetővé.

A $\cos_{\alpha}\gamma = \sin_{\alpha}\beta = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}$, $tg_{\alpha}\gamma = \frac{\sin_{\alpha}\gamma}{\cos_{\alpha}\gamma} = \frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ és $ctg_{\alpha}\gamma = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\gamma}$.

A bizonyításokat és az általános szögfüggvények egyéb tulajdonságait lásd az irodalomjegyzékben!

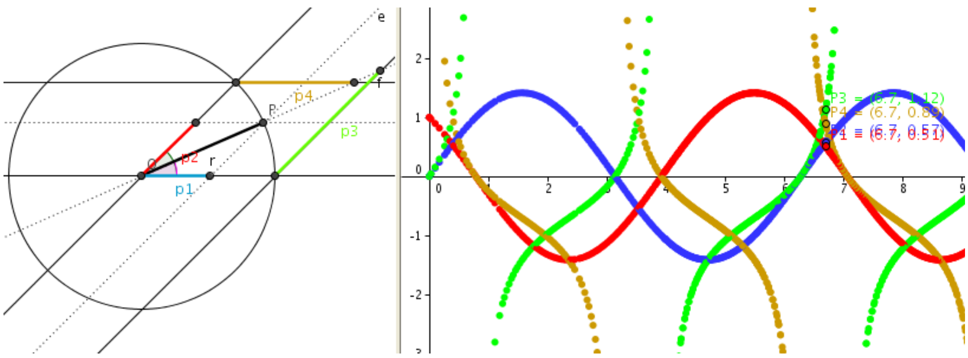
Lássunk egy példát! Számítsuk ki a $tg_{45^o}45^o$ értékét . A fenti összefüggés segítségével :

$$tg_{45^o}45^o = \frac{\sin 45^o}{\sin(45^o + 45^o)} = \frac{\sin 45^o}{\sin 90^o} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A programozható számológépek, vagy a számítógépek segítségével egészen könnyen kiszámítható az értelmezési tartományon belüli tetszőleges szög, tetszőleges alapú szögfüggvény értéke.

II.-3. Grafikus kép

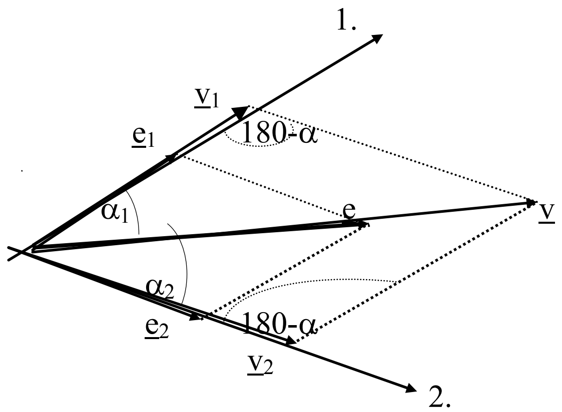
Az általános szögfüggvények grafikus képei hasonlóak a 90^0 -os alapszögűekéhez, csak mások az értékhelyek és az értékek. Az 5. ábrán az $\alpha = 45^0$ –os alapszögű szögfüggvények grafikus képei láthatók nyomvonalként ábrázolva!



5. ábra: az $\alpha = 45^0$ –os alapszögű szögfüggvények grafikus képei

II.-4. Alkalmazás

A továbbiakban vizsgáljuk meg az általános szögfüggvények alkalmazását, a vektorok ferdeszögű koordináta rendszerben történő felbontásakor keletkezett kontravariáns koordináták kiszámítására. Lásd a 6. ábrát!



6. ábra: a $\underline{v}$ vektor felbontása két egymással α szöget bezáró irány szerint

Az 1., illetve 2. irányokba eső egységvektorok $\underline{u}_1$, illetve $\underline{u}_2$, így a $\underline{v}$ vektor irányába eső egységvektor $\underline{e} = \cos_{180-\alpha} \alpha_1 \cdot \underline{u}_1 + \cos_{180-\alpha} \alpha_2 \cdot \underline{u}_2$. Itt $\underline{e}_1 = \cos_{180-\alpha} \alpha_1 \cdot \underline{u}_1$ és $\underline{e}_2 = \cos_{180-\alpha} \alpha_2 \cdot \underline{u}_2$, az $\underline{e}$ vektor összetevő vektorai. A $\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2$, ahol $\underline{v}_1 = v_1 \cdot \underline{u}_1$ és $\underline{v}_2 = v_2 \cdot \underline{u}_2$. A kontravariáns koordinátákra, pedig a $v_1 = v \cdot \cos_{180-\alpha} \alpha_1$ és a $v_2 = v \cdot \cos_{180-\alpha} \alpha_2$ összefüggéseket írhatjuk fel. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\alpha = 90^0$ esetben, vagyis derékszögű koordináta rendszerben, visszakapjuk a szokásos koordinátákat.

Látható tehát, hogy a kontravariáns koordináták felírása (kiszámítása) olyan egyszerűvé válik, mint derékszögű koordináta rendszer esetén.

III. Lissajoux görbék ferdeszögű koordináta rendszerben

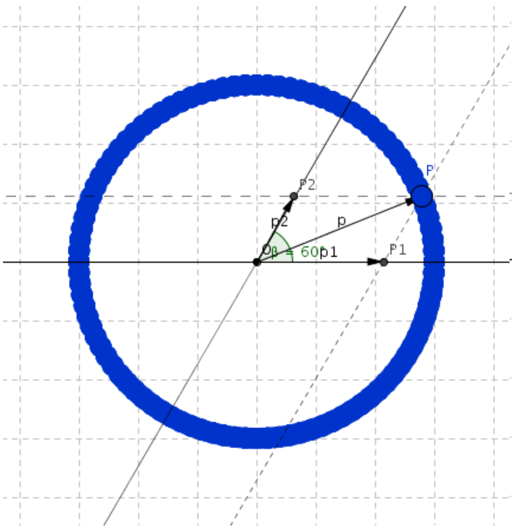
Az általános szögfüggvények, illetve a GeoGebra utolsó alkalmazásaként vizsgáljuk meg az egymással ferdeszöget ($\alpha \neq 90°$) bezáró rezgések egymásra tevődését, amely a Lissajou görbékhez hasonló görbék előállítását teszi lehetővé!

A P pont nyomvonalát továbbra is a $\underline{p}_1$ és a $\underline{p}_2$ vektorok összege határozza meg. A $\underline{p}_1$ és a $\underline{p}_2$ vektorok hossza és iránya a

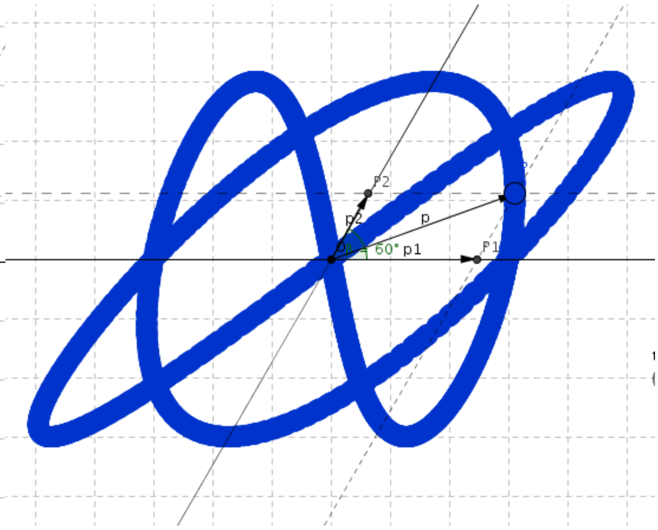
$p_1 = A_1 \cdot \cos_{\pi-\alpha}(2\pi \cdot f_1 \cdot t + \varphi_1) = A_1 \cdot [\sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t + \pi - \alpha + \varphi_1)] / \sin(\pi - \alpha) = A_1' \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t + \pi - \alpha + \varphi_1)$

és a $p_2 = A_2 \cdot \sin_{\pi-\alpha}(2\pi \cdot f_2 \cdot t + \varphi_2) = A_2 \cdot [\sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t + \varphi_2)] / \sin(\pi - \alpha) = A_2' \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t + \varphi_2)$ rezgés (kitérés) egyenletek határozzák meg, ahol az $A_1' = A_1 / \sin(\pi - \alpha)$ és az $A_2' = A_2 / \sin(\pi - \alpha)$ a rezgések legnagyobb kitérései. A $\underline{p}$ vektor nagyságát, a koszinusz tétel (általános Püthagorasz tétel) segítségével, a $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos\alpha}$ összefüggésből számolhatjuk ki, míg irányát a $tg_{180-\alpha}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} = \dfrac{p_2}{p_1}$ képletből (egyenletből) határozhatjuk meg!

Sajátos esetben, ha $A_1 = A_2$, $f_1 = f_2$ és $\varphi_1 = \varphi_2$, akkor a nyomvonal egy kör (1. ábra), ha $A_1 = A_2$, $\varphi_1 = \varphi_2$ és $f_1 \neq f_2$, de a rezgésszámok úgy aránylanak egymáshoz, mint a természetes számok (f_1: f_2 = n_1: n_2), akkor a 2. ábrához hasonló görbét kapunk. Lásd a 7. és 8. ábrát!



7. ábra: f_1: f_2 = 1:1 rezgésszámarányú Lissajou görbéhez hasonló görbe



8. ábra: f_1: f_2 = 2:3 arányú Lissajou görbéhez hasonló görbe

Irodalom

1. Budó Á., Kisérleti fizika II., Tkk., Bp.,1979.
2. Inczeffy Sz., A trigonometrikus függvények általános alakjai, A matematika tanítása, 1995., III.évf./3. szám.
3. Inczeffy Sz., A GeoGebra számítógépes program felhasználása, Lissajou görbék előállítására derékszögű, illetve ferdeszögű rezgések egymásra tevődéseként., műhelyvezetés (demonstrált előadás) az 58. Országos Fizikatanári Ankét és Eszközbemutatón, Hévíz, 2015.